Université UHL de Batna Département des Sciences de la Matière	**Epreuve :** Analyse Numérique **Filière :** Physique Energétique

T. Y

CONCOURS D'ACCES A LA FORMATION DE TROISIEME CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de doctorat en Physique Energétique

Année universitaire 2013-2014

Epreuve : Analyse numérique

Durée : 1 heures 30min

24 octobre 2013

__Note__ : *Aucun document n'est autorisé*

__Barème__ : *Exercice 1 (4points) ; Exercice 2 (4points) ; Exercice 3 (4points) ; Exercice 4(5points) ; ; Exercice 5 (3points)*

Exercice 01

Une corde de 9 unités de longueur est initialement dans sa position d'équilibre. Elle est mise en mouvement par un frappement de sorte que sa vitesse initiale soit donnée par $\partial y/\partial t = 3\sin(\pi x/L)$ 3sin9. Prenez $\Delta x = h = 1$ unité et supposez que $c = \sqrt{Tg/w} = 2$. Lorsque le rapport $c^2(\Delta t)^2/(\Delta x)^2$ est égal à l'unité, le pas de temps $\Delta t = 0.5$
Si les extrémités sont fixes, trouvez les déplacements à un temps t=0.5 plus tard. La longueur est subdivisée en neuf intervalles parce que h=1. En tenant compte de ces données, le problème de vibration de cette corde est donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \cancel{3\sin(\pi x/9)L} \quad 3\sin(\pi x/9) \\ y(x,0) = 0 \\ \Delta x = h = 1, \quad \Delta t = k = 0.5 \end{cases}$$

Résoudre de problème par la méthode des différences finies et comparez vos résultats à ceux de la solution analytique donnée par:

$$y(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-a}^{x+a} 3\sin\frac{\pi v}{L}\,dv = \frac{3L}{2c\pi}\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi ct}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{L} + \frac{\pi ct}{L}\right)\right\}$$

Exercice 02

Résoudre par la méthode des différences finies le problème aux limites, suivant:

$$\begin{cases} y'' - xy' + x^2 y = x^3 \\ y(0) + y'(0) + y(1) + y'(1) = 4, \\ y(0) - y'(0) + y(1) - y'(1) = 3, \qquad h = 0.25 \end{cases}$$

Exercice 03

Montrer que la fonction $f(x) = 1 - 3e^{-x}$ a une unique racine l sur R.

a) Par un procédé de dichotomie ; trouver un intervalle de longueur 1 contenant cette racine.

Pour l'approcher ; on propose les schémas suivants :

T.Y

Université UHL de Batna
Département des Sciences de la Matière

Epreuve : Analyse Numérique
Filière : Physique Energétique

b) $x_0 \in [1;2]; x_{n+1} = x_n + f(x_n)$. Cette suite converge –t- elle vers l ? Pourquoi ?

c) Trouver une valeur $\lambda \in R$ qui assure la convergence de la suite $x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n)$.

d) Appliquer à $f(x)$ la méthode de Newton pour trouver l. Sur quelle fonction définit-on les itérations de point fixe ? Dans quel intervalle doit-on choisir la valeur de départ pour que la convergence soit assurée ?

Exercice 04

On définit la fonction $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Calculer

$$F(x) = \int_0^x g(t)\, dt, \qquad x < 1.$$

a) Quelle est la valeur de $F(x)$ en $x = \frac{2}{3}$?

b) Donner le degré et l'expression du polynôme de Lagrange qui interpole $g(x)$ aux points 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

c) Trouver des coefficients c_0, c_1 et c_2 tels que pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_0^2 p(x)\, dx = c_0 p(0) + c_1 p(1) + c_2 p(2).$$

En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients d_0, d_1 et d_2 tels que pour tout polynôme q de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_0^{\frac{2}{3}} q(x)\, dx = d_0 q(0) + d_1 q\left(\frac{1}{3}\right) + d_2 q\left(\frac{2}{3}\right).$$

Utiliser cette formule pour donner une valeur approchée de $\ln 3$.
Quel est l'ordre de cette méthode ?

Exercice 05

Soit la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

On prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$.

1. En utilisant votre algorithme de résolution de systèmes linéaires, calculer la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Comparer $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{-1}$. Commenter. Ce résultat était-il prévisible ?
3. En utilisant comme norme matricielle $\|\mathbf{A}\| = \max_{ij}(|A_{ij}|)$, estimer le nombre de conditionnement de $\mathbf{A}$.

Très bonne chance !