République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA- Béjaïa
Faculté de Technologie - Département de Génie Mécanique
Concours au Doctorat de 3ème Cycle - LMD : Épreuve - Mécanique des Milieux Continus (durée 01H 30)

Exercice 1 : Considérons un point matériel d'un milieu continu de coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la configuration de référence et le même point occupe la position (x_1, x_2, x_3) dans la configuration actuelle. La transformation qui lie les coordonnées cartésiennes du point matériel s'écrit : $x_1 = \lambda_1 X_1 + \gamma \lambda_2 X_2,\ x_2 = \lambda_2 X_2,\ x_3 = \lambda_3 X_3$. où $\lambda_i\ (i = 1,2,3)\ et\ \gamma$ sont des scalaires positifs.

1.1. Calculer la matrice associée au tenseur gradient de la transformation $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$;

1.2. Montrer que $\overline{\overline{F}}$ se décompose de la manière suivante : $\overline{\overline{F}} = \underline{\underline{F}}^1 \underline{\underline{F}}^2$, préciser les matrices associées à $\underline{\underline{F}}^1\ et\ \underline{\underline{F}}^2$ et interpréter physiquement chaque matrice.

2. Supposons que le milieu continu est homogène, isotrope et incompressible ; l'énergie libre massique d'Helmholtz dans sa description lagrangienne est définie par : $\rho_0 \psi = \dfrac{\mu_0}{2}(I_1 - 3)$ où μ_0 est le module de cisaillement aux petites déformations, ρ_0 est la masse volumique lagrangienne du matériau et I_1 est le 1er invariant du tenseur des dilatations de Cauchy gauche défini par : $I_1 = tr\left(\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}}\right)$; les symboles tr et t désignent respectivement la trace et la transposée d'un tenseur d'ordre deux.

2.1. Calculer les composantes du 1er tenseur de Piola-Kirchhoff $\pi_{ij} = \dfrac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial F_{ij}}$.

2.2. La condition d'incompressibilité impose l'introduction d'une pression hydrostatique (ou multiplicateur de Lagrange) p dans la loi de comportement. Ainsi, le 1er tenseur de Piola-Kirchhoff $\overline{\overline{P}}$ s'écrit : $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{\pi}} - p\left(\underline{\underline{F}}^{-1}\right)^t$; en déduire l'expression de la loi de comportement en termes de tenseur des contraintes de Cauchy, C'est-à-dire $J\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{P}}\,\underline{\underline{F}}^t$ avec $J = \det \underline{\underline{F}}$.

3.1. En utilisant la réponse de 1.1., calculer la matrice associée à $\overline{\overline{\sigma}}$ et en déduire la relation qui lie $(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ et σ_{12}.

3.1.1. Calculer $(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; quel est le chargement correspondant ;

3.1.2. Calculer $(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ quel est le chargement correspondant ;

3.1.3. Calculer $(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ pour $\lambda_1 = \lambda\ et\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-(1/2)}$ quel est le chargement correspondant.

Exercice 2 : L'inégalité de Clausius – Duhem pour un milieu continu s'écrit : $\overline{\overline{\sigma}}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho_0 \dot{\psi} - \rho_0 s \dot{T} - \dfrac{\overline{q}\,\overline{grad\,T}}{T} \geq 0$ où $\psi = e - Ts$: énergie massique libre d'Helmholtz ; e : énergie interne ; s : entropie massique ; T : la température absolue ; $\overline{q}$: vecteur courant de chaleur ; $\overline{\overline{\varepsilon}}$: tenseur des déformations en HPP ; $\dot{X} = dX/dt$. On suppose que $\psi\left(T, \overline{\overline{\varepsilon}}\right)$ dépend de deux variables d'états la température, i.e. T et les déformations, i.e. $\overline{\overline{\varepsilon}}$.

1. Etablir les relations classiques suivantes : $\overline{\overline{\sigma}} = \partial(\rho_0 \psi)/\partial \overline{\overline{\varepsilon}}$ et $s = -\partial \psi / \partial T$.

2. L'équation de conservation de l'énergie (1er principe) s'écrit : $\rho_0 \dot{e} = \overline{\overline{\sigma}}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + r - div\overline{q}$, où r est le terme qui représente la densité volumique du taux de chaleur reçue par le milieu continu de la part des sources extérieures. Montrer que :
$$\rho_0 C \dot{T} = k\,\Delta T + T \frac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial T}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + r \quad \text{où} \quad C = T\frac{\partial s}{\partial T}$$
la chaleur spécifique et k est la conductivité thermique du matériau qui est lié au flux de chaleur par la loi de Fourier : $\overline{q} = -k\,\overline{grad}\,T\ \left(N.B.: div\left(\overline{grad}\,f\right) = \Delta f\right)$.

3. Considérons le cas particulier de la thermo élasticité linéaire : $\rho_0 \psi = (1/2)\left(4\mu_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda_0 \varepsilon_{kk}{}^2\right) - (3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha\vartheta\,\varepsilon_{kk} - (\rho_0 C/2T_0)\theta^2$ où $\mu_0\ et\ \lambda_0$ sont les constantes de Lamé ; $\theta = T - T_0$, T_0 est la température de référence et α le coefficient de dilatation isotherme. Calculer $\overline{\overline{\sigma}} = \partial(\rho_0 \psi)/\partial \overline{\overline{\varepsilon}}$ et $s = -\partial \psi / \partial T$.

– FIN -