



Exercice 4 : 10 points

- a) Montrer que l'approximation successive pour l'extraction d'une racine d'une fonction non linéaire $f(x)=0$ en faisant une approximation de la fonction $f(x)$ en série de Taylor autour d'un point x_k est donnée par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1)$$

- b) Appliquer la formule précédente (1) en évaluant $x(k=2)$ qui représente la solution de $y = \operatorname{tg}(x)$ et $y = x$ si $x(k=0) = 3\pi/2$.

Pour le calcul, il est préférable d'utiliser $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

- c) Montrer que l'approximation successive (les solutions) du vecteur x_k d'un système de n fonctions algébriques non linéaires avec n variables tel que $f(x) = 0$ est donnée par :

$$x_{k+1} = x_k - \nabla_x f^{-1}(x_k) \cdot f(x_k) \quad (2)$$

Avec $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

- d) Appliquer la formule précédente (2) en évaluant $x_1(k=2)$ et $x_2(k=2)$ du système suivant :

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1x_2^3 - x_2 - 4 = 0$$

si les conditions initiales $x_1(k=0) = 1.2$ et $x_2(k=0) = 1.7$.

Exercice 2 : 10 points

Etant données les fonctions $f_1(x) = x|x-3|$, $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$ et les points $x_i = i$

Où $i = 0, 1, 2, 3$.

- a) Les fonctions f_1 et f_2 ont-elles le même polynôme d'interpolation aux points x_i ? Pourquoi ?
- b) Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange de f_1 aux points $x_i, i = 0, 1, 2, 3$ ainsi que la valeur approchée de $f_1(0.5)$.
- c) Dresser la table des différences divisées de f_2 aux points $x_i, i = 0, 1, 2, 3$. En déduire le polynôme de Newton de f_2 .
- d) Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E(x)$ dans les deux cas précédents.