

**EXAMEN OUVRAGES SPECIAUX
 ET ANALYSE DES STRUCTURES**

EXERCICE I : (12 pts)

Soit une poutre isostatique AB simplement appuyée, divisée en n intervalles de distance d chacune sur laquelle on applique une charge P au droit de la section d'abscisse a_j ($a_j = j.d$).

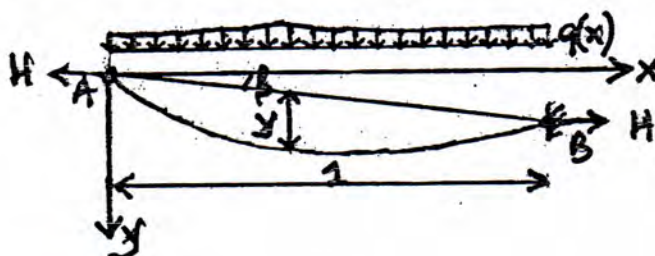
1. Déterminer les matrices d'influence des réactions $M [R_A]$ et $M [R_B]$ pour la section Σ d'abscisse a_i ($a_i = i.d$) (Voir figure) ;
2. Déterminer les matrices d'influence des moments fléchissant et des efforts tranchants de ce système ;
3. Si la longueur totale de la poutre AB est de 12,00m et $d = 2,00m$, déterminer et tracer la ligne d'influence correspondante à la section $x_j = 4,00m$ à partir de la matrice d'influence ;
4. Vérifier les résultats précédents par la méthode des lignes d'influence.



EXERCICE II : (08 pts)

Soit un câble souple suspendu entre deux extrémités A et B de niveaux différents soumis à des charges verticales (Voir figure 2)

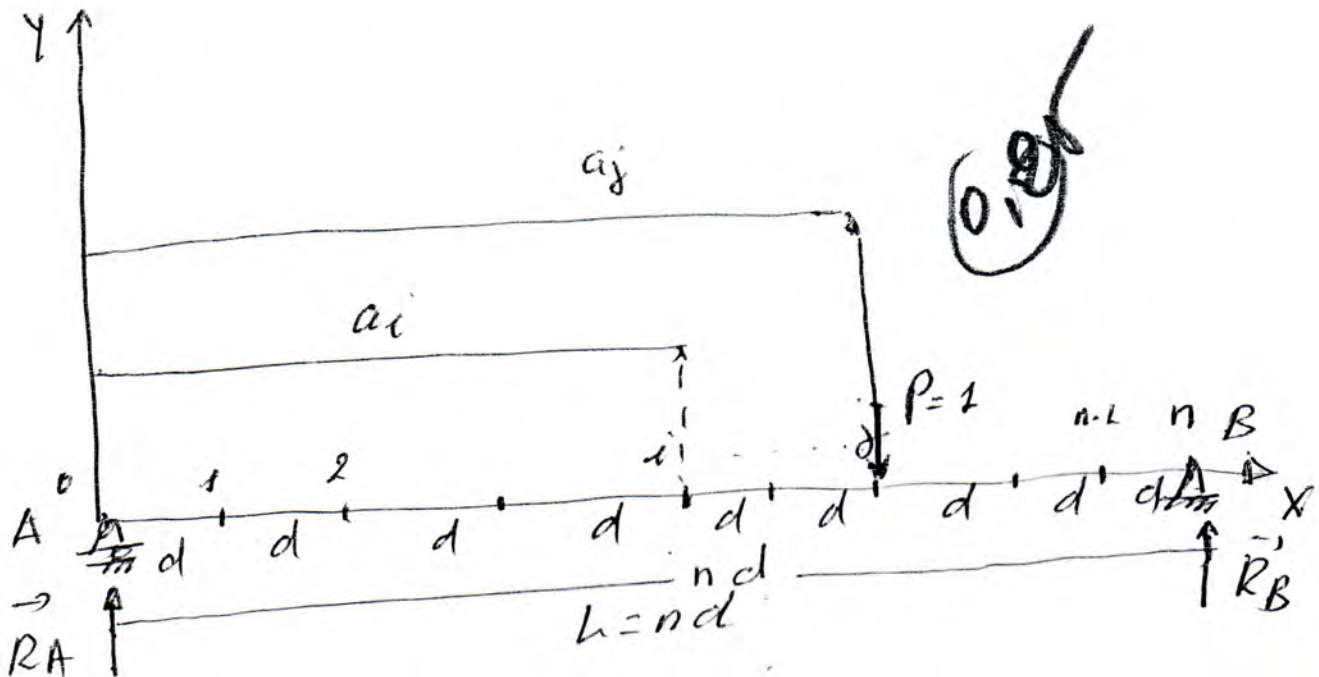
1. Déterminer la longueur du câble.
2. Déterminer l'allongement élastique du câble.



Bonne chance

Corrigé DE la variante n° 2

Exo. 1



(0,25)

- i - représente la section à étudier
- j - représente la position de la charge
- a_i - La distance ou l'abscisse de la section à étudier
- a_j - la distance ou l'abscisse de la charge.

tel que $a_i = i \cdot d$ et $a_j = j \cdot d$

1. les matrices d'influence des réactions $M[RA]$ et $M[RB]$

les lignes d'influence des réactions sont :

$$L[RA] = \frac{1 \cdot (L - a_j)}{L} = \frac{nd - j \cdot d}{nd} = \frac{n-j}{n}$$

$$\left\{ L[RA] = \frac{1}{n} (n-j) \right\} \quad (0,25)$$

$$\left\{ L[RB] = \frac{1 \cdot a_j}{L} = \frac{j \cdot d}{nd} = \frac{1}{n} j \right\} \quad (0,25)$$

d'où la matrice d'influence des réactions est comme suit :

(1)

$$M[R] = \begin{bmatrix} L[R_A] \\ L[R_B] \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} \text{ avec } 0 \leq j \leq n.$$

(0,15)

D'où

$$M[R] = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n & (n-1) & (n-2) & (n-3) & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) & n \end{bmatrix}$$

2. Matrices d'influence des Moments fléchissants et effets tranchants.

a - Matrice d'influence de moment fléchissant

Dans ce cas, on distingue deux cas, en fonction de la position de la charge par rapport à la section à étudier.

1^{er} cas $i \leq j \Rightarrow M[M_s] = R_A \cdot a_i = \frac{1}{n} (n-j) i d$
 $\Rightarrow M[M_s] = \frac{d}{n} i \cdot (n-j)$ (*)

(0,15)

2^{es} cas $i > j \Rightarrow M[M_s] = R_B (L - a_i) = \frac{1}{n} j (nd - id)$
 $\Rightarrow M[M_s] = \frac{d}{n} (n-i) j$ (**)

(0,15)

D'où, on peut écrire les deux expressions (*) et (**)

comme suit

1^{er} cas $M[M_s] = \frac{d}{n} I_{n-1}$
 2^{es} cas $M[M_s] = \frac{d}{n} I_{n-2}$

avec $I_{n-1} = \begin{cases} i(n-j) \rightarrow i \leq j \\ (n-i)j \rightarrow i > j \end{cases}$

avec $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$

on peut considérer la matrice I_{n-2}

(2)

$$I_{n-1} = \begin{bmatrix} z^{i(n-j)} \\ (n-i) & j \\ (n-1) & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ (n-2) & (n-1) \end{bmatrix} \quad (0, 2d)$$

il'ou, on a :

$$I_{n-1} = \begin{bmatrix} (n-1) & (n-2) & \dots & \dots & 2 & 1 \\ (n-2) & 2(n-2) & \dots & \dots & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & \dots & \dots & (n-2) & \\ 1 & 2 & \dots & \dots & (n-2) & (n-1) \end{bmatrix}$$

Enfin la matrice d'influence est :

$$M^T M_S Y = \frac{d}{n} I_{n-1}$$

b - matrice d'influence des effets branchant

Comme nous savons l'effet branchant provoque le problème de discontinuité au droit de l'application de la charge $P=1$ c'est à dire pour $i=j$ et par conséquent il y a deux cas à envisager.

1. cas $i \neq j$

$$(0, 2d) T_S^g = \frac{M_{ij} - M_{(i-1)j}}{d}; \quad T_S^d = \frac{M_{(i+1)j} - M_{ij}}{d}$$

2. cas $i=j$

$$(0, 1d) T_S^d = \frac{M_{(i+1)i} - M_{ij}}{d}; \quad T_S^g = \frac{M_i - M_{(i-1)i}}{d}$$

avec $i = 1, 2, \dots, n$ (1 à n)
 $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ($0 \leq j \leq (n-1)$).

il'ou on peut écrire le système pour la forme matricielle suivante

$$T_{ij} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} y_s^g & \dots & y_s^d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{ij} \end{bmatrix}$$

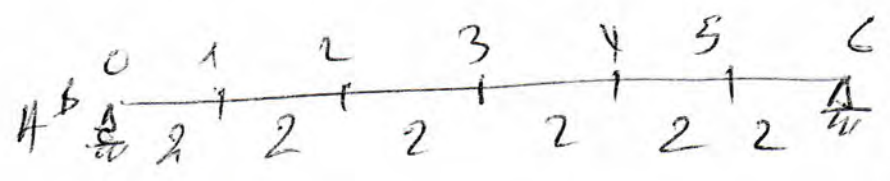
avec $\begin{bmatrix} y_s^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & & & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (0,5)

en $\begin{bmatrix} y_s^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}$ (0,5)

Remarque La différence entre T_s^g et T_s^d réside dans la différence de diagonale.

3/ Si $AB = 12,00 \text{ m}$; $d = 2,00 \text{ m}$. $\bar{x}_j = 4,00 \text{ m}$

ou a



$M^g M_s^d = \frac{d}{n} I_{n-1} = \frac{2}{6} I_{n-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (0,5)

d'après les lignes d'influence, ou a

$X < 4,00 \text{ m}$ $L_{Ms} = \left(1 - \frac{X}{12}\right) X_s - 1 (X_s - X)$ (4)

pour $X_s = 4,00 \text{ m}$ et $X = 2$. $L_{Ms} = 4/3$.

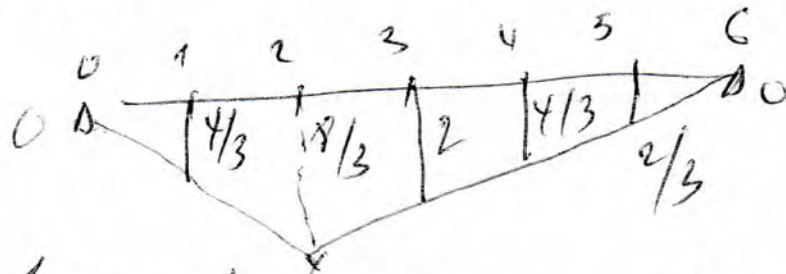
- Pour les effets tranchants, on a :

$$T_s^q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T_s^q = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{O.V.}$$

ou $T_s^d = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{O.V.}$

4) tracer les lignes d'influence
a) pour les moments fléchissants



D'après le principe de la ligne d'influence ; on a :

$$X \leq 4,00 \text{ m} \quad L_{Ms} = \left(1 - \frac{X}{12}\right) X_s - 1 (X_s - X)$$

pour $X_s = 4,00 \text{ m}$ et $X = 2,00 \text{ m}$ $L_{Ms} = 4/3$

pour $X \geq 4,00 \text{ m}$ $L_{Ms} = \left(1 - \frac{X}{12}\right) X_s$, on a :

$X = 4,00 \text{ m} \rightarrow L_{Ms} = 8/3$	$X = 10,00 \text{ m} \rightarrow L_{Ms} = 2/3$
$X = 6,00 \text{ m} \rightarrow L_{Ms} = 2$	
$X = 8,00 \text{ m} \rightarrow L_{Ms} = 4/3$	

(5)

Si on revient à la deuxième ligne de la matrice d'influence $[M_0]$, on trouve que les ordonnées L_{15} pour $X_5 = 4$, on peut

$$\frac{1}{3} (4; 8; 6; 4; 2) = (4/3, 8/3, 2, 4/3, 2/3)$$

qui vérifie les résultats de la L_5 (l. 7 de la section).

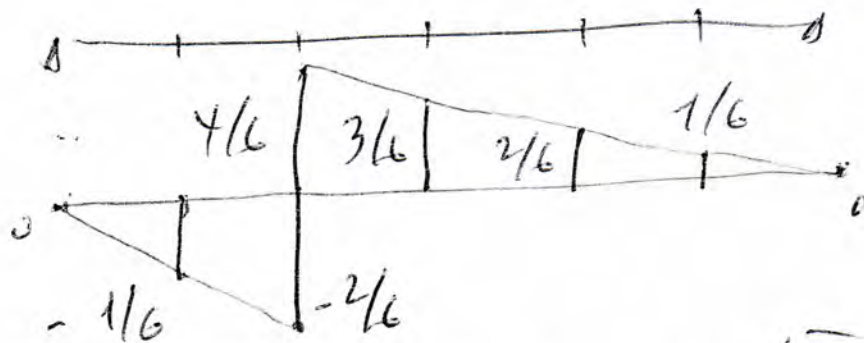
b) Effets tranchants

Les résultats obtenus à partir de la ligne d'influence (L. 7), on a :

$$X \leq 4,00 \text{ m} \quad L_{15} = \left(1 - \frac{X}{12}\right) - 1 = -\frac{X}{12} \quad \left| \begin{array}{l} X=2 \rightarrow -1/6 \\ X=4 \rightarrow -2/6 \end{array} \right.$$

pour $X \geq 4,00 \text{ m}$ $L_{15} = 1 - \frac{X}{12} \quad \left| \begin{array}{l} X=4 \rightarrow 4/6 \\ X=6 \rightarrow 3/6 \\ X=8 \rightarrow 2/6 \\ X=10 \rightarrow 1/6 \end{array} \right.$

L'Épure de l.-I. des effets tranchants est



Si on revient aux matrices, on trouve :

pour $X \leq 4,00 \text{ m}$, on prend les deux premiers termes de la deuxième ligne de la matrice d'influence T_5 qui sont $1/6 (-1; -2) = (-1/6; -2/6)$.

pour $X > 4,00 \text{ m}$, on prend de T_5 suivant $1/6 (4; 3; 2; 1) = (4/6; 3/6; 2/6; 1/6)$

Donc tous les résultats Vérifient les résultats obtenus
par les matrices d'influence: T_s et T_s^d

(7)

Exercice 2

Pour déterminer la longueur d'un câble, on applique la méthode de calcul V.K. KATSURINE, et par conséquent, on décompose la charge $q(x)$ en deux composantes:

- suivant la direction \perp à AB (0,9)
- suivant la direction \parallel à AB (0,9)

Mais, pour faciliter les calculs, on néglige les effets de la composante \parallel à AB , d'où on a uniquement $q_1(x)$. (0,5)

Le câble travaille comme élément souple suspendu aux 2 extrémités de même niveau avec dimensions géométriques:

- 1 longueur de la travée l_1
- 2 de flèche y_1
- 3 élément infiniment petit dx_1

D'où la longueur du câble est déterminée par:

$$L = \int_{l_1} ds = \int_{l_1} \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \int_{l_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} dx_1 \quad (1)$$

Comme la flèche y_1 petite $\Rightarrow \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 \ll 1$

On développe en série l'expression précédente au voisinage 0, d'où on a:

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 \approx \varepsilon \Rightarrow \sqrt{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$$

D'où, on a $\sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2$ (1)

$$\Rightarrow L = \int_{l_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy_1}{dx_1} \right)^2 \right] dx_1 \quad (*)$$

sachant que $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Q_1}{H_1}$; (0,1)

avec Q_1 - effort tranchant d'une poutre simplement appuyée correspondante de longueur l_1
 H - Tension horizontale du câble.

Si on remplace l'expression dy_1/dx_1 par sa valeur dans l'expression (*), on obtient

$$L = \int_{l_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H_1} \right)^2 \right] dx_1 \quad (0,2)$$

avec $H_1 = \text{cte}$
 $L = l_1 + \frac{1}{2H_1^2} \int Q_1^2 dx_1 \quad (0,2)$

avec $l_1 = \frac{l}{\cos \beta}$; $y_1 = y \cos \beta$; $Q_1 = Q \cos \beta$;
 $H_1 = \frac{H}{\cos \beta}$; $dx_1 = \frac{dx}{\cos \beta}$; (0,1)

d'où on a : $L = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{1}{2HL} \cos^3 \beta \int Q_1^2 dx_1$

on pose $D = \int Q_1^2 dx_1 = \int Q^2 \cos^2 \beta \frac{dx}{\cos \beta}$

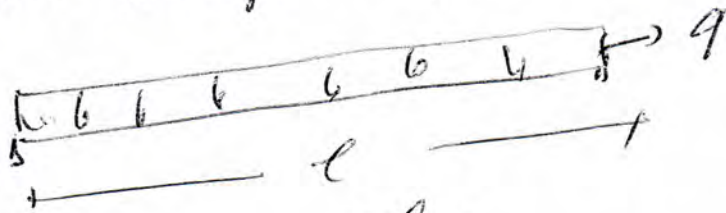
$$D = \int_l Q^2 \cos \beta dx \quad (0,1) \quad (2)$$

où D - exprime l'influence de la charge appliquée sur la forme géométrique de la corde.

(0,5)

Avec $D = ?$

pour une charge uniformément répartie, on a.



$$D = \int_{l_1}^{l_2} Q_1^2 dx_1 = \int_0^l Q^2 \cos^2 \beta dx$$

avec $Q(x) = (ql/2 - qx) \Rightarrow Q(x) = \frac{q^2 l^2}{4} + q^2 x^2 - q^2 lx$

$$D = \int_0^l \left(\frac{q^2 l^2}{4} + q^2 x^2 - q^2 lx \right) \cos^2 \beta dx$$

$$D = \int_0^l \left(\frac{q^2 l^2}{4} + q^2 x^2 - q^2 lx \right) \cos^2 \beta dx$$

$$D = \left(\frac{q^2 l^3}{4} + \frac{q^2 l^3}{3} - \frac{q^2 l^3}{2} \right) \cos^2 \beta \quad (1)$$

$$\left\{ D = \frac{q^2 l^3}{12} \cos^2 \beta \right\}$$

D'autre, on a $h = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{1}{2H^2} \cdot \cos^2 \beta \cdot \frac{q^2 l^3}{12} \cos^2 \beta$

$$h = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{1}{24H^2} q^2 l^3 \cos^2 \beta \quad (3)$$

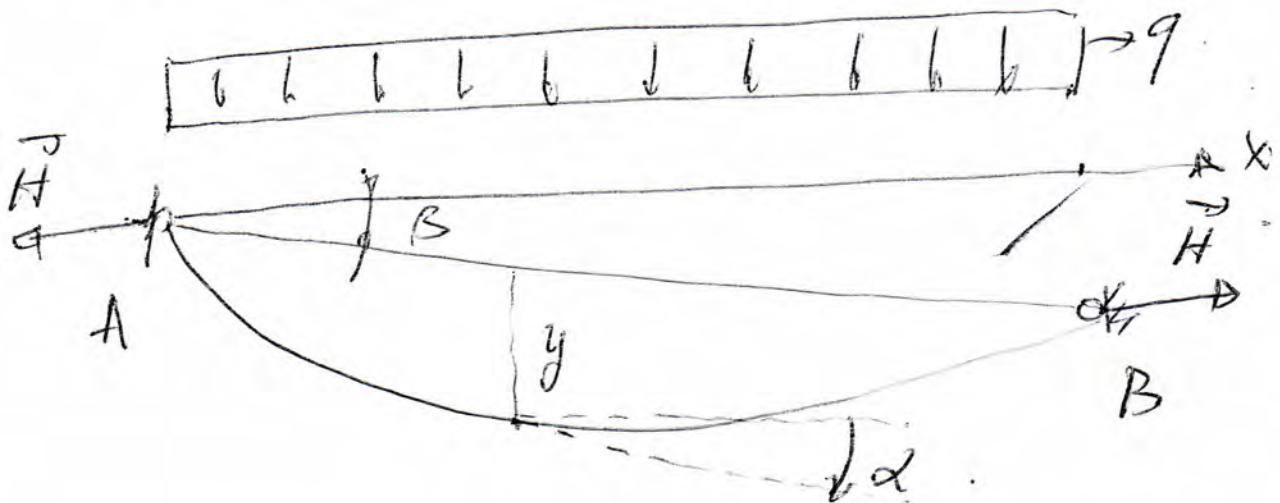
$$L = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{1}{24H^2} q^2 l^3 \cos^3 \beta$$

2. Déterminer de l'allongement élastique du câble.

L'allongement élastique total du câble se définit par :

$$\Delta L = \int_0^l \frac{H}{\cos \alpha} \frac{ds}{EA} = \frac{H}{EA} \int_0^l \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{H}{EA} \int_0^l \frac{1}{\cos \alpha} dx$$

$$\Delta L = \frac{H}{EA} \int_0^l \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} dx = \frac{H}{EA} \int_0^l (1 + \tan^2 \alpha) dx$$



En introduisant

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{Q}{H} + \tan \beta$$

$$\Delta L = \frac{H}{EA} \int_0^l \left(1 + \frac{Q^2}{H^2} + 2 \frac{Q}{H} \tan \beta + \tan^2 \beta \right) dx$$

(4)

$$\delta L = \frac{H}{EA} \int_0^l \left(\frac{1 + \tan^2 \beta}{\cos^2 \beta} + 2 \tan \beta \frac{Q}{H} + \frac{Q^2}{H^2} \right) dx$$

$$= \frac{H}{EA} \int_0^l \left(\frac{1}{\cos^2 \beta} + 2 \tan \beta \frac{Q}{H} + \frac{Q^2}{H^2} \right) dx.$$

$$\delta L = \frac{H \cdot l}{EA \cos^2 \beta} + \frac{2 \tan \beta}{EA} \int_0^l Q dx + \frac{1}{EA H} \int_0^l Q^2 dx$$

Or on sait que la somme des aires du diagramme de l'effort tranchant Q toujours nulle $\left(\int_0^l Q dx = 0 \right)$.

$$\delta L = \frac{H \cdot l}{EA \cos^2 \beta} + \frac{J}{EA \cdot H}$$

avec $J = \frac{q^2 l^3}{12} \cos^2 \beta$

$$\delta L = \frac{H \cdot l}{EA \cos^2 \beta} + \frac{q^2 l^3 \cos^2 \beta}{12 EA \cdot H}$$

(5)