Sujet 2

Université de Mostaganem
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Génie Electrique

EPREUVE D'ELECTROMAGNETISME

Doctorat LMD : Composants, Signaux et Systèmes

Durée : 2 heures

Exercice 1 (8 points):

Une onde plane, dont on prendra l'amplitude pour unité, tombe, sous incidence normale, sur une surface plane S qui sépare deux milieux (1) et (2) de perméabilités magnétiques identiques et égales à celle du vide μ_0 et de permittivités respectives

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0\, \varepsilon_{r1}$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\, \varepsilon_{r2}$, ε_0 est la permittivité du vide

1) Rappeler les caractéristiques d'une onde plane
2) En écrivant les équations de continuité à l'interface séparant les deux milieux (1) et (2) cités précédemment, établir les formules donnant l'amplitude transmise t et l'amplitude réfléchie r du champ électrique.

Application numérique : $\varepsilon_{r1} = 1$ et $\varepsilon_{r2} = 2.25$

Exercice N°2 (12 points):

Soit a et b (a > b) les dimensions internes de la section droite d'un guide d'ondes rectangulaire rempli d'un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$.

On rappelle que les composantes longitudinales E_Z et H_Z des champs électrique et magnétique vérifient les relations :

$$E_Z = e_z(x,y)\, e^{\mp j\beta z} \quad , \quad H_Z = h_z(x,y)\, e^{\mp j\beta z}$$

Le signe (-) correspond à l'onde progressive se propageant selon z > 0 et le signe (-) pour l'onde se propageant dans le sens contraire.

$$\frac{\partial^2 e_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z(x,y)}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)\, e_z(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 h_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z(x,y)}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)\, h_z(x,y) = 0$$

$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$ et β est la constante de propagation. On pose $k_c^2 = k^2 - \beta^2$

Les composantes transversales sont trouvées à partir des composantes longitudinales à l'aide des relations suivantes :

$$E_x = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\, \partial x} - \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\, \partial y} + \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z\,\partial x}$$

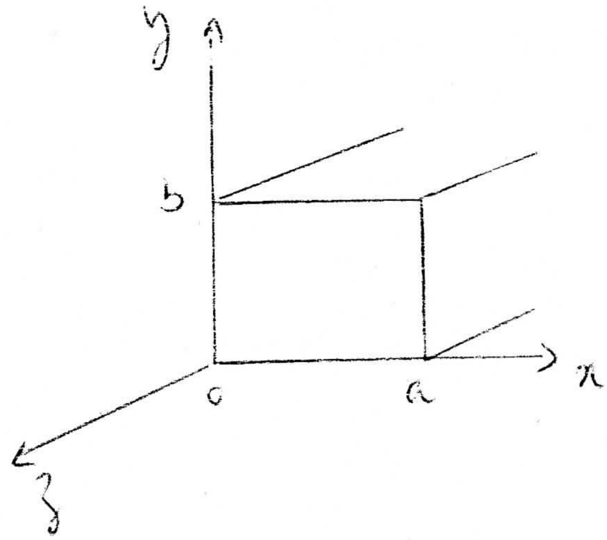
$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z\,\partial y}$$

Montrer que pour les modes TE, $k_c^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ avec n = 1,2, .. et m = 1, 2, ..

Donner les expressions de la longueur d'onde de coupure λ_C et de la fréquence de coupure f_C

Calculer le domaine fréquentiel d'utilisation de ce guide en monomode si

a = 2 b = 25 mm et εr = 1.



ELECTROMAGNÉTISME

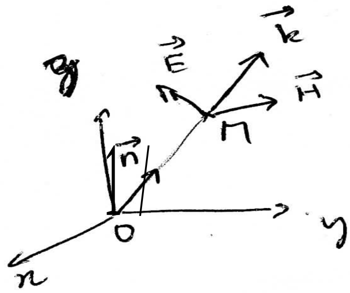
Exercice N° 1

1) Caractéristiques d'une onde plane :

Les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ sont de la forme :

$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{-j\vec{k}\vec{r}}$ 0,25

$\vec{H} = \vec{H}_0 \, e^{-j\vec{k}\vec{r}}$ 0,25



0,25 $\vec{k} = k\,\vec{n}$ vecteur d'onde

$\vec{n} = \dfrac{\vec{OM}}{OM}$ vecteur unitaire indiquant la direction de propagation

$\vec{r} = \vec{OM}$: position où l'on calcule le champ

$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

E_0 et H_0 amplitude des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ceux sont des constantes pour une onde plane indépendantes de la position r 0,5

$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -j\vec{k}\vec{E}\end{array}\right\}\ \vec{E} \perp \vec{k}$ 0,5

$\vec{E}$ perpendiculaire à la direction de propagation

$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$

$\Rightarrow \vec{H} = -\dfrac{1}{j\omega\mu_0}\,\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0\,e^{-j\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow$

$\vec{H} = Y\,\vec{n}\wedge\vec{E}$ avec $Y = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$ 0,25 admittance d'onde

~~$\vec{E}, \vec{H}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre~~

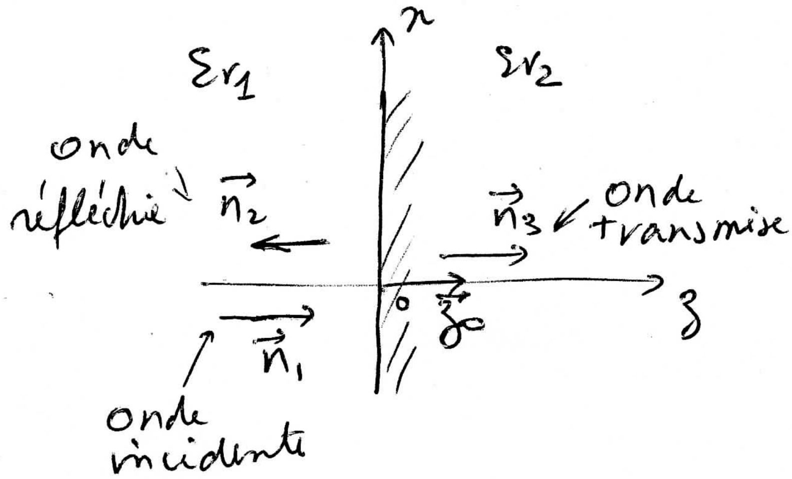
$\vec{H}$ est perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{k}$ 0,5

$\vec{E}, \vec{H}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct

ELECTROMAGNETISME

Exercice N° 1 (suite)

2)



onde incidente

$$\vec{E}_i = \vec{E}_1 \, e^{-jk_1 \vec{n}_1 \vec{r}} \qquad (1)$$

$$\vec{H}_i = Y_1 \, \vec{n}_1 \wedge \vec{E}_i \qquad 0{,}25 \qquad (2)$$

$$Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}{\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_{r1}}\, Y_0 \qquad 0{,}25$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{r1}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}} \qquad (3)$$

onde réfléchie

$$\vec{E}_r = \vec{E}_2 \, e^{-jk_1 \vec{n}_2 \vec{r}}$$

$$\vec{H}_r = Y_1 \, \vec{n}_2 \wedge \vec{E}_r \qquad (4) \qquad 0{,}25$$

onde Transmise

$$\vec{E}_t = \vec{E}_3 \, e^{-jk_2 \vec{n}_3 \vec{r}} \qquad (5) \qquad 0{,}25$$

$$\vec{H}_t = Y_2 \, \vec{n}_3 \wedge \vec{E}_t$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} \quad (6) \quad , \quad Y_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}{\mu_0}} = Y_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} \quad (7) \quad 0{,}25$$

Ondes sous incidence normale $\Rightarrow$ $\vec{n}_1 = \vec{z}_0$ $0{,}25$, $\vec{n}_2 = -\vec{z}_0$ $0{,}25$

$\vec{n}_3 = \vec{z}_0$ $0{,}25$

si $\vec{E}_i$ selon x , $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ selon x

équation (1) $\Rightarrow$ $\vec{H}_i$ selon y $\quad 0{,}25$

" (4) $\Rightarrow$ $\vec{H}_r$ selon $-y$ $\quad 0{,}25$

" (5) $\Rightarrow$ $\vec{H}_t$ selon y $\quad 0{,}25$

* Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ en $z=0$ 0,25

$\Rightarrow \quad E_1 + E_2 = E_3$ 0,5

* Continuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ en $z=0$ 0,25

$Y_1 (E_1 - E_2) = Y_2 E_3$ 0,5

$$t = \frac{E_3}{E_1} = \frac{2Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}+\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad 0{,}5$$

$$r = \frac{E_2}{E_1} = \frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}-\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}+\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad 0{,}5$$

A.N $\quad \varepsilon_{r1} = 1 \quad , \quad \varepsilon_{r2} = 2{,}25$

$$t = \frac{2}{1+\sqrt{2{,}25}} = 0{,}8 \quad 0{,}25$$

$$r = -\frac{\sqrt{2{,}25}-1}{\sqrt{2{,}25}+1} = -0{,}2 \quad 0{,}25$$

ELECTROMAGNETISME

Exercice N° 2

1) onde TE $\Rightarrow$ $E_z = 0$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2 h_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2$$

Méthode de séparation des variables

$$h_z(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad 0,5$$

$$\Rightarrow g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k_c^2 f \cdot g = 0$$

en divisant par $f \cdot g$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + k_c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x^2} + k_x^2 f = 0 & 0,5 \\ \frac{\partial g}{\partial y^2} + k_y^2 g = 0 & 0,5 \end{cases}$$

et $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$ 0,5

$\Rightarrow$ Solutions :

$$f = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \quad 0,5$$
$$g = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \quad 0,5$$

Conditions aux limites

les composantes tangentielles du champ électrique sur les parois du guide sont nulles 0,5

$$\begin{cases} \text{pour } x=0 \text{ et } x=a, \ E_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & 1 \\ \text{pour } y=0 \text{ et } y=b, \ E_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 & 1 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -A_1 k_x \sin k_x x + A_2 k_x \cos k_x x$ 0,25

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ pour $x = 0 \Rightarrow A_2 = 0$ 0,25

pour $x = a \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$ avec $n = 0, 1, 2,$ 0,5

$\frac{\partial g}{\partial y} = -B_1 k_y \sin k_y y + B_2 k_y \cos k_y y$ 0,25

$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ pour $y = 0$ et $y = b \Rightarrow B_2 = 0$ et 0,25

0,5 $k_y = \frac{m\pi}{b}$ avec $m = 0, 1, 2, ..$

si $A_1 B_1 = A_{nm}$ la solution est

$h_z(x,y) = A_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y$

$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \Rightarrow k_c = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$

2) nous avons $\beta^2 = k^2 - k_c^2$

les ondes se propagent si $k^2 > k_c^2$ 0,5

k_c = nombre d'onde de coupure

la longueur d'onde de coupure $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$

pour le mode TE_{nm}

$\lambda_{c_{nm}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$ 1

la fréquence de coupure $f_c = \frac{v}{\lambda_c} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_c}$ 1

c : vitesse de la lumière $= 3.10^8$ m/s

3) le mode fondamental est le mode TE_{10} 0,5

il se propage seul de f_{c10} à f_{c20}

$\varepsilon_r = 1 \Rightarrow f_{c10} = \frac{c}{\lambda_{c10}} = \frac{c}{2a} = 6$ GHz 1

$f_{c20} = \frac{c}{\cdot} = f_{c_{01}} = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{a} = \frac{c}{2b} = 12$ GHz