République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Concours d'accès en doctorat LMD

Signaux, Systèmes Conceptions et Applications

Épreuve de Signaux et Applications

Jeudi 6 Octobre 2016 - Durée : 1h30mn

Exercice 1 : (07 points)

1. Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) discret a une réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h(n)}$ qui est présentée dans la figure 1 :

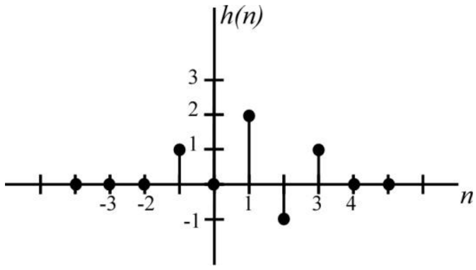


Figure 1 : *Réponse impulsionnelle*

   Déterminer la sortie du système si son entrée est $x(n) = u(n+1) - u(n-3)$ où $u(n)$ est la fonction échelon unité (*Heaviside*).

2. Trouvez la réponse $y(n)$ du filtre ci-dessous (voir Figure 2) pour une entrée $x(n) = u(n-3)$ où $u(n)$ est la fonction échelon unité.

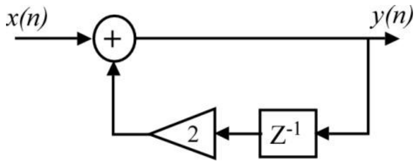


Figure 2 : *Représentation du filtre*

3. Trouvez la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h(n)}$ d'un filtre ayant la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-3}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}5\, z^{-1}\right)}$$

Exercice 2 : (07 points)

Soit le signal $x(t) = \exp(-at)\, u(t)$, avec $a > 0$ et $u(t)$ l'échelon unité.

1. Calculer sa transformée de Fourier (TF), $X(f)$.
2. Quelle est alors la TF de $x(-t)$?
3. En déduire la TF $Y(f)$ de $y(t) = x(|t|)$.
4. Quelle propriété possède $Y(f)$?

5. Déduire la TF du signal $z(t) = x(|t|)\ \cos(2\pi\ f_0\ t)$, avec f_0 une grande valeur par rapport à la bande passante de $y(t)$.

<u>Exercice 3:</u> (06 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit un système (filtre) linéaire invariant dans le temps (LIT). On appelle réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, la réponse de ce système à l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ (voir Figure 3)

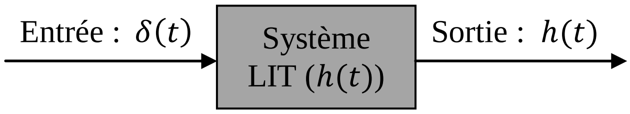


Figure 3 : *Système linéaire et réponse à une impulsion*

- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $\delta(t-\tau)$
- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $x(\tau)\ \delta(t-\tau)$
- Calculer $y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\ \delta(t-\tau) d\tau$
- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $y(t)$, quel opérateur mathématique obtient-on ?

2. Soit le signal $x(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ (on pose $f_0 = 1/T$). Par ailleurs, soient deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ tels que :

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = x(t + t_0)$$

- Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{x1}(\tau)$ du signal $x_1(t)$, on donne :

$$\gamma_{x1}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_1(t-\tau)\, dt$$

- Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x1,x2}(\tau)$ des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on donne :

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t-\tau)\, dt$$

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Concours d'accès en doctorat LMD

Signaux, Systèmes Conceptions et Applications

Correction de l'épreuve : « Signaux et Applications »

<u>Exercice 1 (7 pts)</u>

1. Un système SLIT discret a une réponse impulsionnelle ***h(n)*** présentée par la figure suivante :

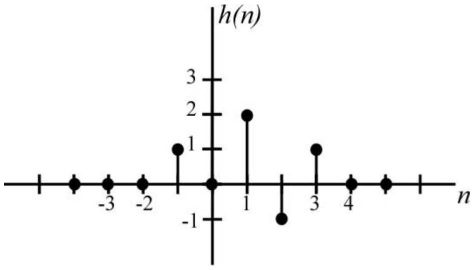
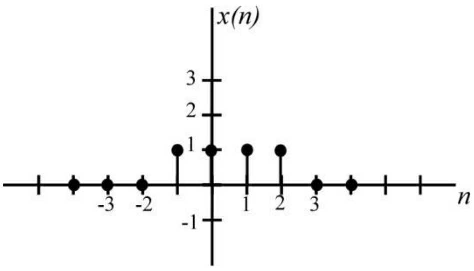
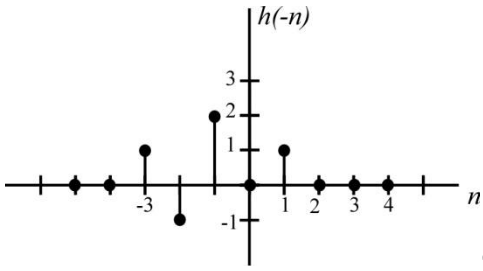


Figure 1

Déterminer la sortie ***y(n)*** du système si son entrée est $x(n)=u(n+1)-u(n-3)$ où *u(n)* est la fonction échelon (*Heavyside*).



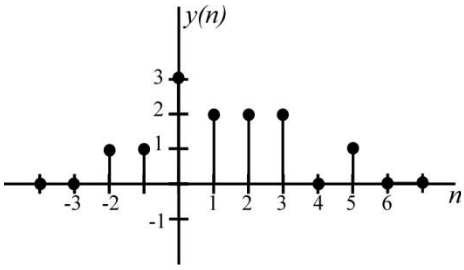


(0,75 pt)

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(n-k) \qquad (0{,}5\text{ pt})$$

pour $n \le -3$ ou $n > 6 \Rightarrow y(n)=0 \qquad (0{,}5\text{ pt})$

$y(-2)=1; y(-1)=1; y(0)=3; y(1)=2; y(2)=2; y(3)=2; y(4)=0; y(5)=1 \qquad (0{,}75\text{ pt})$



2. Trouvez la réponse $y(n)$ du filtre ci-dessous pour $x(n)=u(n-3)$.

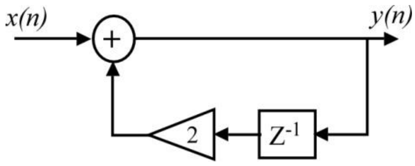


Figure 2

$$y(n)=x(n)+2y(n-1)\rightarrow TZ\rightarrow Y(z)=X(z)+2z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)=X(z)\cdot\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)}=X(z)\cdot H(z) \qquad (0{,}5\,\text{pt})$$

$$x(n)=u(n-3)\rightarrow TZ\rightarrow X(z)=TZ\left[u(n-3)\right]=z^{-3}TZ\left[u(n)\right]=\frac{z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)} \qquad (0{,}5\,\text{pt})$$

$$Y(z)=\frac{z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{(z-1)}+\frac{c}{(z-2)} \qquad (0{,}5\,\text{pt})$$

$$a=\left.\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{2} \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$b=\left.\frac{1}{z(z-2)}\right|_{z=1}=-1 \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$c=\left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=2}=\frac{1}{2} \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$Y(z)=\frac{1}{2z}-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{2(z-2)}=\frac{z^{-1}}{2}-\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{z^{-1}}{2\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$y(n)=TZ^{-1}\left[Y(z)\right]=\frac{1}{2}\delta(n-1)-u(n-1)+\frac{1}{2}(2)^{n-1}u(n-1) \qquad (0{,}75\,\text{pt})$$

3. Trouvez la RI ***h(n)*** d'un filtre ayant la FT suivante : $F(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0{,}5\,z^{-1}\right)}$

$$h(n)=TZ^{-1}\left(F(z)\right) \qquad (0{,}5\,\text{pt})$$

$$F(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0{,}5\,z^{-1}\right)}=\left(\frac{a}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{b}{\left(1-0{,}5\,z^{-1}\right)}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-3}\right) \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$a=\left.\frac{1}{\left(1-0{,}5\,z^{-1}\right)}\right|_{z=1}=2 \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$b=\left.\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}\right|_{z=2}=-1 \qquad (0{,}25\,\text{pt})$$

$$F(z)=\left(\frac{2}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-0{,}5\,z^{-1}\right)}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-3}\right)$$

$$h(n)=TZ^{-1}\left[F(z)\right]=2u(n)-(0{,}5)^{n}u(n)+2u(n-1)-(0{,}5)^{n-1}u(n-1)+2u(n-3)-(0{,}5)^{n-3}u(n-3)$$

(0,75 pt)

Exercice 2:

1/ $X(f) = \int_0^{\infty} \exp(-at)\exp(-j2\pi f t)\,dt$ 1

$= \int_0^{\infty} \exp(-[a + j2\pi f]t)\,dt = \dfrac{1}{a + j2\pi f}$ 0,5

2/ $\mathcal{F}[x(-t)] = \int_{-\infty}^{0} \exp(at)\exp(-j2\pi f t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \exp(at)\exp(j2\pi(-f)t)\,dt$ 0,5

$=$

$\mathcal{F}(a-t) = X(-f) = X^*(f) = \dfrac{1}{a - j2\pi f}$ 0,5

3/ $y(t) = x(-t) + x(t) = x(|t|)$ 0,5

$\Rightarrow Y(f) = X^*(f) + X(f)$

$= \dfrac{1}{a - j2\pi f} + \dfrac{1}{a + j2\pi f} = \dfrac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$ 0,5

4/ $Y(f)$ est réelle $(\in \mathbb{R})$ 1

5/ $z(t) = y(t).\cos(2\pi f_0 t)$ alors $Z(f) = Y(f) * \mathcal{F}(\cos 2\pi f_0 t)$ 0,5

$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}[\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ 1

$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{2}Y(f) * \delta(f-f_0) + \frac{1}{2}Y(f) * \delta(f+f_0)$ 1

$= \frac{1}{2}[Y(f-f_0) + Y(f+f_0)]$

Exercice 3: (6 points)

1. Soit un système (filtre) linéaire invariant dans le temps. On appelle réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, la réponse de ce système à l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ (figure 3)

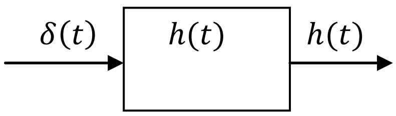


Figure 3 : *Système linéaire et réponse à une impulsion*

- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $\delta(t-\tau)$

  Comme le système est *invariant dans le temps*, la réponse du filtre est : **(0,5 pt)**

  $\boldsymbol{h(t-\tau)}$

- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $x(\tau)\,\delta(t-\tau)$

  Comme le système est *linéaire invariant dans le temps*, la réponse du filtre est : **(0,5 pt)**

$$\boldsymbol{x(\tau)h(t-\tau)}$$

- Calculer $y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$ **(0,5 pt)**

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau = x(t)}$$

- Calculer alors la réponse du filtre à l'entrée $y(t)$, quel opérateur mathématique obtient-on ?

  Comme le système est *linéaire invariant dans le temps*, la réponse du filtre est : **(0,5 pt)**

$$\boldsymbol{\int_{\mathbb{R}} x(\tau)\,h(t-\tau)d\tau}$$

  L'opérateur mathématique obtenu est : **(1 pt)**

la convolution entre $x(t)$ et $h(t)$

2. $x_1(t) = a\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ (avec $f_0 = 1/T$) et $x_2(t) = x(t+t_0)$ tels que :

- Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_{x1}(\tau)$ du signal $x_1(t)$, on donne : **(1,5 pt)**

$$\gamma_{x1}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a^2\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\sin(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)\,dt$$

$$\gamma_{x1}(\tau) = \frac{a^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\cos(2\pi f_0\tau) - \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi - 2\pi f_0\tau)]\,dt$$

$$\gamma_{x1}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) - \underbrace{\frac{a^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi - 2\pi f_0\tau)\,dt}_{=0}$$

$$\boldsymbol{\gamma_{x1}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

- Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{x1,x2}(\tau)$ des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on donne : **(1,5 pt)**

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t-\tau)\,dt$$

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a^2\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\sin(2\pi f_0(t+t_0-\tau)+\varphi)\,dt$$

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) = \frac{a^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[\cos(2\pi f_0(\tau-t_0)) - \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi + 2\pi f_0 t_0 - 2\pi f_0\tau)]\,dt$$

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0(\tau-t_0)) - \underbrace{\frac{a^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi + 2\pi f_0 t_0 - 2\pi f_0\tau)\,dt}_{=0}$$

$$\gamma_{x1,x2}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\left(2\pi f_0(\tau - t_0)\right)$$