République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Concours d'accès en doctorat LMD
Signaux, Systèmes Conceptions et Applications
Épreuve d'Électromagnétisme

Jeudi 6 Octobre 2016 - Durée : 1h30mn

Partie I: (8pts)
Questions de cours:

1- Exprimez les quatre équations de Maxwell en forme locale et intégrale et donnez la signification physique de chacune.

2- Comment se comporte le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique?

3- Une onde OEM est constituée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ qui forment un plan perpendiculaire à la direction de propagation que l'on appelle le plan d'onde. Exprimez les équations de propagation pour les champs $\vec{\underline{e}}$ et $\vec{\underline{h}}$ en valeurs instantanées complexes.

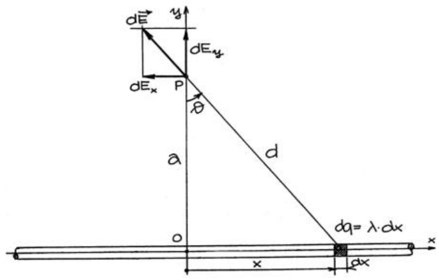
Partie II: (12pts)

Exercice 1: (6 pts)

Soit un barreau de longueur infinie et de densité linéique de charge λ constante (figure ci-dessous).

1- Calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé en P.

2- Le barreau est parcouru par un courant I constant, calculer le champ d'induction $\vec{B}$ créé en P, en appliquant la Loi de Biot-Savart.



Exercice 2: (6 pts)

1) Trouver la charge contenue dans le volume défini par $2 \le r \le 3\,(m)$ (en coordonnées sphériques) étant donnée la distribution volumique de charge:

$$\rho_v = 5\,\frac{\cos^2\varphi}{r^3}$$

2) Rappeler l'énoncé de théorème de Gauss.

3) En appliquant le théorème de Gauss sur le vecteur d'induction électrique, trouver l'expression de $\vec{D}$ en un point pour r>3.

4) Trouver la d.d.p entre le point A(4,π/3,π/2) et le point B(2,π/6,π).

5) Soit le vecteur de densité de courant $\vec{j}$ donné par :

$$\vec{j} = 100\,\cos 2y\,\vec{u_x} \quad (\text{A/m}^2)$$

Trouver l'intensité du courant qui traverse la portion du plan x=0, limitée à $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\,(m)$ et $-0.01 \le z \le 0.01\,(m)$.

Bon courage

République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Concours d'accès en doctorat LMD
Signaux, Systèmes Conceptions et Applications
Épreuve d'Électromagnétisme

Jeudi 6 Octobre 2016 - Durée : 1h30mn

CORRECTION

Partie I: (8pts)
Questions de cours:
1)- 5pts.
La signification physique de ces quatre équations de Maxwell est:

(0.25pt) 1- **<u>Loi de Gauss (électrique)</u>**: il existe des monopôles électriques dits charges électriques q. Deux sortes de charge (+ et -). Deux charges de même signe se repoussent, de signe contraire elles s'attirent. Traduit la loi de Coulomb en $1/r^2$. **(0.5pt)**

(0.25pt) 2- **<u>Loi de Gauss (magnétique)</u>**: il n'existe pas de monopôle magnétique (ou de charge magnétique isolée). **(0.5pt)**

(0.25pt) 3- **<u>Loi de Faraday (indiction)</u>**: toute variation de flux d'induction magnétique génère une tension induite (force électromotrice induite). **(0.5pt)**

(0.25pt) 4- **<u>Loi d'Ampère (généralisée)</u>**: tout courant électrique et toute variation de flux électrique génère un champ magnétique. **(0.5pt)**

<u>Formulation locale.</u>		***<u>Les relations intégrales.</u>***
$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}}$ (équation de *Maxwell - Gauss*). **(0.25pt)** ε_0 est la *permittivité absolue du vide*. Les lignes de champ $\vec{E}$ divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges -.	①	**(0.25pt)** $\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$ *Théorème de Gauss*.
$\boxed{div\vec{B} = 0}$ ($\vec{B}$, est un *champ de rotationnel*). Les lignes de champ $\vec{B}$, sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper (il n'existe pas de «monopôles magnétiques» comme il existe des charges électriques positives ou négatives). **(0.25pt)**	②	**(0.25pt)** $\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M)\cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0}$ $\vec{B}$ est à *flux conservatif* (Le flux de $\vec{B}$, à travers un circuit ne dépend que du circuit et non de la surface choisie pour calculer ce flux).
$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ **(0.25pt)** (équation de *Maxwell - Faraday*).	③	**(0.25pt)** $\boxed{\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}}$ S s'appuie sur Γ. *Relation de Faraday*.
$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}_{tot} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ **(0.25pt)** (équation de *Maxwell - Ampère*). μ_0 est la *perméabilité absolue du vide*.	④	$\boxed{\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}\cdot d\overrightarrow{OM} = \mu_0 \iint_{P\in S} \vec{j}_{tot}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}}$ où S s'appuie sur Γ orienté. **(0.25pt)** Forme *généralisée* du *Théorème d'Ampère*.

2- 1pt

Le champ électrique à l'intérieur d’un conducteur en équilibre électrostatique est nul. **(1 pt)**

3- 2pts

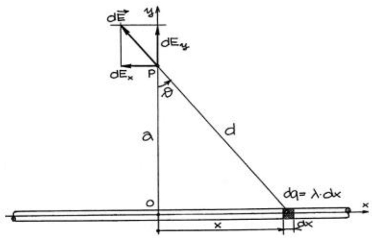
Les équations de propagation pour les champs $\vec{\underline{e}}$ et $\vec{\underline{h}}$ en valeurs instantanées complexes s’écrivent sous la forme suivante:

$$\boxed{\Delta\vec{\underline{e}} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \vec{\underline{e}}}{\partial t^2} = 0}$$ **(1 pt)** et $$\boxed{\Delta\vec{\underline{h}} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \vec{\underline{h}}}{\partial t^2} = 0}$$ **(1 pt)**

Partie II: (12pts)

Exercice 1: (6 pts)

1- Le champ électrique $\vec{E}$ créé en P est donné par:



$$dq = \lambda \cdot dx$$

Le champ $d\vec{E}$ créé par dq est dans le prolongement du segment de longueur d reliant P à dq est:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\cdot dx}{d^2}$$ **(0.25 pt)**

Cette relation donne le module de $d\vec{E}$.

La longueur d est donnée par: $d = \sqrt{a^2 + x^2}$ et P a les composante $(-x, a)$ d’où on obtient la relation suivante:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\cdot dx}{[a^2+x^2]}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{j}\right)$$ **(0.25 pt)**

On pourrait, à ce stade, effectuer les deux intégrations. On peut s’épargner la moitié de ce travail en remarquant que deux charges dq et dq' situées symétriquement de part et d’autre de l’axe y (donc de positions +x et -x) créent des composantes horizontales du champ égales et de signes opposés. Elles s’annulent donc mutuellement. Comme le barreau a été admis de longueur infinie, on peut en tirer la conclusion que l’axe y, quelle que soit sa position dans l’espace fini, sépare le barreau en deux segments de longueurs égales. La composante selon x sera donc nulle ($E_x = 0$).

$$dE_x = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\cdot dx}{[a^2+x^2]\sqrt{a^2+x^2}},\ E_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{[a^2+x^2]\sqrt{a^2+x^2}}\cdot dx = 0$$ **(0.5 pt)**

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a\cdot dx}{[a^2+x^2]\sqrt{a^2+x^2}},\ E_y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{[a^2+x^2]\sqrt{a^2+x^2}}\cdot dx$$ **(0.5 pt)**

On aura donc; $E = E_y$

$$E = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a}{[a^2+x^2]\sqrt{a^2+x^2}} \cdot dx = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{[a^2+x^2]^{3/2}} \cdot dx = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left. \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$ **(0.5 pt)**

$$E = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left. \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{a^2} - \frac{-1}{a^2} \right] = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot a}$$ **(0.5 pt)**

Finalement, $E = E_y = \dfrac{\lambda}{2\pi a \cdot \varepsilon_0}$ [V/m] **(0.5 pt)**

$d\vec{l} = \begin{vmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ **(0.25 pt)** $\vec{r} = \begin{vmatrix} -x \\ d \\ 0 \end{vmatrix}$ **(0.25 pt)** $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot d\vec{l} \times \vec{r} = \dfrac{d \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot dx \cdot \vec{k}$ **(0.5 pt)**

mais : $r = d/\cos\alpha$ **(0.25 pt)** $x = d \cdot \tan\alpha$ **(0.25 pt)**

d'où : $dx = d \cdot 1/\cos^2\alpha \cdot d\alpha$ **(0.5 pt)**

le long de l'axe Oz : $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{k}$ **(0.25 pt)**

$$\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d} \cdot \vec{k} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d} \cdot \vec{k}$$ **(0.5 pt)**

finalement : $\boxed{\vec{B}(d) = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad [\mathrm{T}]}$ **(0.25 pt)**

Exercice 2: (6 pts)

1) La distribution de charge étant volumique. La charge élémentaire dq s'exprime comme suit :

$$dq = \rho_v \, dv = 5 \, \frac{\cos^2\varphi}{r^3} dv$$ **(0.25 pt)**

dv est le volume élémentaire en coordonnées sphériques donné par : $dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.
La charge totale est donc :

$$Q = \iiint_{(v)} \rho_v \, dv = 5 \int_2^3 \frac{1}{r} dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi$$ **(0.25 pt)**

$$= 5[\ln r]_2^3 \, [-\cos\theta]_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$= 5\ln\left(\frac{3}{2}\right) \times 2 \times \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)_0^{2\pi}$$ **(0.25 pt)**

Donc :

$$Q = 10\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right) \ (C)$$ **(0.5 pt)**

2) Le théorème de Gauss dit que le flux de champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque S est égal à la somme algébrique des charges à l'intérieure de cette surface divisée par la permittivité électrique ε du milieu (**0.5 pt**) :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \quad (V.m) \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

3) Le vecteur d'induction électrique $\vec{D}$ est donné par :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Appliqué au champ d'induction électrique $\vec{D}$, le théorème de Gauss s'exprime alors comme suit:

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \sum Q_{\text{int}} = Q_T = 10\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad (C) \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Le flux de $\vec{D}$ correspond alors à une unité de charge.

Notons que $\vec{D}$ est radial et parallèle au vecteur d'orientation de la surface $\vec{n}$ pour toute sphère de rayon $r>3$. Donc :

$$\vec{D} = D\vec{n} = D\vec{u_r} \quad \text{et} \quad \vec{ds} = ds\,\vec{n} = ds\,\vec{u_r} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Alors :

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot \vec{ds} = D \oiint_{(S)} ds = DS = D\,4\pi r^2, \; r > 3 \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

(S désigne la surface fermée d'une sphère de rayon $r>3$). Il vient que :

$$\vec{D} = \frac{5}{2r^2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \vec{u_r}, \; r > 3 \quad \left(C/m^2\right) \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

4) Le champ électrique est relié à la différence de potentiel par la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \textbf{(0.25 pt)} \Rightarrow \int_A^B dV = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

En coordonnées sphériques, il vient que :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \cdot dr\,\vec{u_r} = -\frac{5}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \int_{r_A=4}^{r_B=2} \frac{1}{r^2} dr \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$= \frac{5}{8\varepsilon} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad (V) \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

5) L'intensité du courant traversant la surface considérée est donnée par :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{ds} \qquad \textbf{(0.25 pt)}$$

$$= \int_{-0/01}^{0.01} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(100 \cos 2y\, \vec{u_x}\right) \cdot \left(dy\, dz\, \vec{u_x}\right) \qquad \textbf{(0.25 pt)}$$

$$= 100 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2y\, dy \int_{-0.01}^{0.01} dz = 0.02 \times 100 \times \left[\frac{\sin 2y}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\,A \qquad \textbf{(0.25 pt)}$$